平面内におけるある領域の格子点問題について (解析数論と数論諸分野の交流)

古屋, 淳

数理解析研究所講究録
1091巻 1999年 211-217

平面内におけるある領域の格子点問題について

名古屋大学多元数理　古屋 淳 (JUN FURUYA)

1. 序

k を2以上の実数としたとき、$x \geq 0$ に対して, $R_k(x)$ を 領域 $|\xi|^k + |\eta|^k \leq x$ の内部及び周上の格子点の総数とおく. すなわち,

$$R_k(x) = \sharp\left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid |m|^k + |n|^k \leq x\right\}.$$

さらに, $P_k(x)$ を次で定義する:

$$P_k(x) = R_k(x) - \frac{2\Gamma^2(1/k)}{k\Gamma(2/k)} x^{2/k}.$$

ここでは, 格子点問題の定義として, この関数 $P_k(x)$ の最良評価（すなわち $O-$評価と $\Omega-$評価を一致させる）を求めるものとする. この問題は $k=2$ のときが Circle problem と呼ばれる円内の格子点の総数に対する問題であり, 上からの評価に対しては Gauss が最初に $P_2(x) = O(x^{1/2})$ を証明した. その後この評価は改良が進み, 現在得られている最良の評価は $P_2(x) = O(x^{23/73}(\log x)^{315/146})$ であり, これは Huxley [2] によって証明された.

一方, $\Omega-$評価に対しては Hardy [1] が $P_2(x) = \Omega_\pm(x^{1/4})$ を示している. （現在, $\Omega-$ 評価も改良されているが, ここでは省略する.）

一般の k（$k \geq 2$） に対しては, Krätzel [3][4] が次の漸近公式を導いた.

$$P_k(x) = H_k(x) + \Delta_k(x),$$

ここで, 関数 $H_k(x)$ は次で定義されるものである:

$$H_k(x) = \frac{8\Gamma(1/k)}{\pi k} x^{1/k-1/k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{2\pi n}\right)^{1/k} \cos 2\pi\left(nx^{1/k} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right). \tag{1.1}$$

また, $\Delta_k(x)$ は誤差項で, 次で評価される.

$$\Delta_k(x) = O(x^{2/3k}).$$

$\Delta_k(x)$ の評価はその後、Krätzel [5] によって $\Delta_k(x) \ll x^{27/41k}$ によって改良されているが, 現在の最良の評価は

$$\Delta_k(x) \ll x^{46/73k}(\log x)^{315/146} \tag{1.2}$$

であり, これは Kuba [7] によってあたえられた.

ここで, [3, Theorem 3.17A] では, $\Delta_k(x) \ll x^{\alpha_k}$ なる α_k に対して $\alpha_k < 1/k - 1/k^2$ となる k においては $P_k(x)$ の $O-$評価と $\Omega-$評価は一致することが示されている. よって, (1.1) および (1.2) を用いることによって $k > 73/27$ において $R_k(x)$ に対する「面積で近似するという意味での」格子点問題は解決を見ていることになる.

また, [3, Theorem 3.17A] によると, $R_k(x)$ の格子点問題をみるには$\Delta_k(x)$ の最良評価を求めること, すなわち α_k の下限を求めること, に帰着できる. よって, 次に$\Delta_k(x)$ の $\Omega-$ 評価についてみる. これに対しては, Schnabel [10] が $k \geq 3$ の整数に対して $\Delta_k(x) = \Omega(x^{1/3k})$ を証明し, Krätzel がこの改良として

$$\Delta_k(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/2k})$$

を証明している [3][6].

ここで, 上記の格子点問題の一般化として次の領域に対する問題を考える. $1 \leq b \leq a$ である 2 つのパラメーター a, b に対して $R_k(a,b)$ を次のように定義する:

$$R_k(a,b) = \sharp\left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; \left|\frac{x}{a}\right|^k + \left|\frac{y}{b}\right|^k \leq 1\right\},$$

さらに, 誤差項 $P_k(a,b)$ を次で定義する:

$$P_k(a,b) = R_k(a,b) - \frac{2\Gamma^2(1/k)}{k\Gamma(2/k)}ab. \tag{1.3}$$

ここで, $k = 2$ の場合が, 平面内の楕円に対する格子点問題である. この場合, $P_2(a,b)$ の評価の, Huxley の評価に対応するものは Kuba [8] によって得られている.

また, 関数 $\Delta_k(a,b)$ を次で定義する.

$$\Delta_k(a.b) = P_k(a,b) - H_k(a,b) - H_k(b,a), \tag{1.4}$$

ここで, 関数 $H_k(\alpha,\beta)$ はつぎのものである.

$$H_k(\alpha,\beta) = \frac{4\Gamma(1/k)}{\pi k}\alpha^{-1/k}\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{2\pi n}\right)^{1/k}\cos 2\pi\left(n\alpha - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right).$$

まず, 関数 $P_k(a,b)$ の評価をまとめると次の通りである.

Theorem 1. k を $k \geq 2$ である実数とし, a,b を $1 \leq b \leq a$ である パラメーター とする.

(1) $k > 73/27$ に対して, $b \to \infty$ のとき

$$P_k(a,b) = \begin{cases} O(ab^{-1/k}) & , \\ \Omega(ab^{-1/k}) & . \end{cases}$$

(2) $2 \leq k \leq 73/27$, $b \to \infty$ のときはつぎの 2 つの場合に分かれる:

(i) $a \gg b^{23/50+73/50k}(\log ab)^{63/20}$ のとき

$$P_k(a,b) = \begin{cases} O(ab^{-1/k}) & , \\ \Omega(ab^{-1/k}) & . \end{cases}$$

(ii) $b \ll a \ll b^{23/50+73/50k} (\log ab)^{63/20}$ のとき

$$P_k(a,b) \ll (ab)^{23/73}(\log ab)^{315/146}.$$

従って Theorem 1 より, $R_k(a,b)$ に対する格子点問題は $k > 73/27$ においては $1 \leq b \leq a$, $b \to \infty$ のもとで解決を見ていることになる.

次に, 関数 $\Delta_k(a,b)$ について考える. 上からの評価に対しては, 後述の Proposition 1 と 2 を用いることによって次が示される.

$$\Delta_k(a,b) \ll \begin{cases} ab^{-1} & \text{if} \quad b^2 \ll a, \\ (ab)^{1/3} & \text{if} \quad b^{13/10} \ll a \ll b^2, \\ (ab)^{23/73}(\log ab)^{315/146} & \text{if} \quad b \ll a \ll b^{13/10}. \end{cases}$$

さらに, $\Omega-$ 評価に対しては, Krätzel [3, pp. 153–156] および, [6] の手法を用いることによって, 次の定理を導くことが出来る.

Theorem 2. ℓ を固定された実数で $\ell \geq 1$ とする. さらに a,b を $a = \ell b$ の関係を満たすものとする. このとき, $b \to \infty$ に対して

$$\Delta_k(a,b) = \Omega_\pm(b^{1/2}),$$

すなわち

$$\Delta_k(a,b) = \Omega_\pm((ab)^{1/4})$$

となる.

この定理では a,b について, 非常に強い条件である $a = \ell b$ という比例の関係が用いられている. このような条件が付随する理由としては, まず第一に, 証明の中で $\Delta_k(a,b)$ について, ある種の重みつきの積分を用いる箇所がありこの積分を実行するため, 一変数化を行なう必要がある, ということがあげられる. また, この一変数化において $a = \ell b$ である条件にすることはこの方法において本質的なことであるように思われる.
しかし, この条件は無理のない仮定となっている. なぜならば, この条件のもとでは領域 $|\xi/a|^k + |\eta/b|^k \leq x$ は相似に拡大していくからである.

2. 証明の概略

Theorem 1 を示すためには, 次の 2 つの Proposition と (1.4) を用いればよい.

Proposition 1. $k \geq 2$, $1 \leq b \leq a$ に対して,

$$\Delta_k(a,b) = O\left((ab)^{1/3}\right) + O(ab^{-1}).$$

Proposition 2. $k \geq 2,\ 1 \leq b \leq a \ll b^{23/10}$ に対して,

$$\Delta_k(a,b) = O\left((ab)^{23/73}(\log ab)^{315/146}\right) + O(ab^{-1}).$$

この2つの Proposition は次のようにして証明される.

まず, $R_k(a,b)$ は 次のように表示されることに注意をしておく.

$$R_k(a,b) = \frac{\Gamma^2(1/k)}{2k\Gamma(2/k)}ab + I_k(a,b) + I_k(b,a) + \Psi_k(a,b) + \Psi_k(b,a) + \psi\left(\frac{a}{2^{1/k}}\right)\psi\left(\frac{b}{2^{1/k}}\right).$$

ここで, $\psi(x) = x - [x] - 1/2$ であり, 関数 $I_k(\alpha,\beta)$, $\Psi_k(\alpha,\beta)$ （$(\alpha,\beta) = (a,b)$ または (b,a) ）は次で定義される.

$$I_k(\alpha,\beta) = -\frac{4\beta}{\alpha^k}\int_{\alpha\cdot 2^{-1/k}}^{\alpha}\left(1-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^k\right)^{1/k-1} t^{k-1}\psi(t)dt,$$

(2.1) $$\Psi_k(\alpha,\beta) = -4\sum_{\alpha\cdot 2^{-1/k}<n\leq\alpha}\psi\left(\beta\left(1-\left(\frac{n}{\alpha}\right)^k\right)^{1/k}\right).$$

（この表示は, 具体的にこの領域内の格子点の総数を数えあげた後, Euler-Maclaurin の和公式を用いることによって得られる.）

次に $I_k(a,b)$ において, この関数を次の2つの部分に分ける.

$$\begin{aligned} I_k(\alpha,\beta) &= -\frac{4\beta}{\alpha^k}\left\{\int_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha\cdot 2^{-1/k}}\right\}\left(1-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^k\right)^{1/k-1} t^{k-1}\psi(t)dt \\ &= -\frac{4\beta}{\alpha^k}\int_0^{\alpha}\left(1-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^k\right)^{1/k-1} t^{k-1}\psi(t)dt + O(\alpha^{-1}\beta). \end{aligned}$$

ここで, 上式の変形において 後半部分には部分積分を用いた. 前半部分について, generalized Bessel function で表示したのち, この関数の漸近展開を代入すると（ generalized Bessel function の定義と漸近展開は [3, pp. 145–147] 参照）

$$\begin{aligned} I_k(\alpha,\beta) &= \frac{4\Gamma(1/k)}{\pi k}\alpha^{-1/k}\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{2\pi n}\right)^{1/k}\cos 2\pi\left(n\alpha - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) \\ &\quad + O(\alpha^{-1}\beta), \end{aligned}$$

すなわち,

$$\Delta_k(a,b) = \Psi_k(a,b) + \Psi_k(b,a) + O(ab^{-1})$$

となる. そこで, 問題は $\Psi_k(\alpha,\beta)$ の評価に帰着された. まず, Proposition 1 は van der Corput の評価式 ([3, Theorem 2.3] 参照) を用いれば証明される（詳細は省略させて頂く）.

また, Proposition 2 はつぎの Huxley によって示された 結果 [2, Theorems 3, 4] を使って証明される. （ここでは Huxley の結果を Kuba がまとめ直した形（[7, Lemma] または [8,

Lemma 1]）で Lemma をとりあげる.）

Lemma [Huxley]. M, M' および T を, $M \le M' < 2M$ かつ $M \le C_1 T^{83/146}(\log T)^{-63/292}$（$C_1$ はある定数）である正のパラメーターとする. さらに, $F(t)$ を $1 \le t \le 2$ において 4 回連続微分可能で次の条件を満たす関数とする:

$$F'(t), \quad F''(t), \quad F^{(3)}(t), \quad F'(t)F^{(3)}(t) - 3\left(F''(t)\right)^2, \quad F''(t)F^{(4)}(t) - 3\left(F^{(3)}(t)\right)^2 \neq 0.$$

このとき次の評価が成り立つ:

$$\sum_{M \le m \le M'} \psi\left(\frac{T}{M} F\left(\frac{m}{M}\right)\right) \ll T^{23/73} (\log T)^{315/146},$$

ここで, O-constant は C_1 および F の 4 回までの微分がとる値の範囲に依存する.

Proposition 2 の証明に移る（証明の方法は [7] および [8] に従っていることに注意しておく）. まず (2.1) より

$$\Psi_k(\alpha, \beta) = -4 \sum_{\alpha \cdot 2^{-1/k} < n \le \alpha - \alpha_1} \psi\left(f(n)\right) + O(\alpha_1)$$

となる（ α_1 は後で選ぶ）. ここで, 簡略化のため $t \in [\alpha \cdot 2^{-1/k}, \alpha - \alpha_1]$ に対して

$$f(t) = \beta\left(1 - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^k\right)^{1/k}$$

とおいた. まず, $f(t)$ の微分について考えると, $t \in [\alpha \cdot 2^{-1/k}, \alpha - \alpha_1]$, $r = 1, 2, 3, 4$ に対し,

$$|f^{(r)}(t)| \asymp \frac{\beta}{\alpha^k} t^{k-r} \left(1 - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^k\right)^{1/k - r} \asymp \frac{\beta}{\alpha^r}\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{1/k - r}$$

であり, さらに,

$$f'(t), \quad f''(t), \quad f^{(3)}(t) \neq 0,$$

$$\begin{aligned} f'(t)f^{(3)}(t) - 3\left(f''(t)\right)^2 &= (k-1)\frac{\beta^2}{\alpha^{2k}}\left(1 - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^k\right)^{2/k-4} t^{2k-4}\left(\left(\frac{t}{\alpha}\right)^k (k+1) - 2k + 1\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} f''(t)f^{(4)}(t) - 3\left(f^{(3)}(t)\right)^2 &= -(k-1)^2\frac{\beta^2}{\alpha^{2k}}\left(1 - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^k\right)^{2/k-6} t^{2k-6}\left\{(2k+1)(k+1)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{2k}\right. \\ &\qquad \left. +(k+1)(2k-5)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^k + (2k-3)(k-2)\right\} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

となることが確かめられる.

$\tau=1-(1/2)^{1/k}$, $g(t)=f([\alpha]-t)$, $\alpha_1 \asymp (\alpha\beta)^{23/73}$ とおき, $\Psi_k(\alpha,\beta)$ における和を$\alpha_j=2^{j-1}\alpha_1$, $j=1,2\cdots J$ （J は $M_J=\tau\alpha$ として選ぶ）と分割する. すなわち, つぎの形になる.

$$\Psi_k(\alpha,\beta)=\sum_{j=1}^{J-1} S_j + O((\alpha\beta)^{23/73}), \tag{2.2}$$

ここで S_j は

$$S_i=\sum_{\alpha_j\le m<2\alpha_j} \psi(g(m)) \tag{2.3}$$

で定義する.

あとは Lemma において $M=\alpha_j$, $M'=-[2M]-1$, $T=\alpha^{-k}\beta M^{1+1/k}$ かつ $F(u)=\frac{M}{T}g(Mu)$ とおけば $F(u)$ についての条件はすべて満たされる.

また, $M\le C_1T^{83/146}(\log T)^{-63/292}$ については条件を

$$M\le C_2T^{13/23} \tag{2.4}$$

に置き換えて考えると, $M\le\alpha$ なので$\alpha\ll\beta^{13/10}$ の仮定のもとで, (2.4) が満たされることが確かめられる.

よって, $\alpha\ll\beta^{13/10}$ のもと Lemma が適用出来て

$$S_j(\alpha,\beta)\ll\left(\alpha^{-k}\beta M^{1+1/k}\right)^{23/73}\left(\log\left(\alpha^{-k}\beta M^{1+1/k}\right)\right)^{315/146}$$

となり, この評価と (2.2), (2.3) より Proposition 2 を示せすことができる.

つぎに, 定理 2 の証明の概略について述べる. 証明は [3, pp. 153–156] に従っておこなう. $\Re s>0$ に対し, 関数 $G(s)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-s\left(\left|\frac{n}{\ell}\right|^k+|m|^k\right)^{1/k}\right)\\ &= 4{\sum_{m=0}^{\infty}}'\ {\sum_{n=0}^{\infty}}'\ \exp\left(-s\left(\left(\frac{n}{\ell}\right)^k+m^k\right)^{1/k}\right), \end{aligned}$$

ここで, 記号 ${\sum_{m=0}^{\infty}}'$ は $m=0$ のとき項を 1/2 倍することを意味するものとする.

Poisson の和公式（[3, pp. 22–23] 参照）を 2 回適用することによって次の式が得られる:

$$G(s)=4\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}^{*}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}^{*}\int_0^\infty\int_0^\infty\exp\left(2\pi i(nt+m\tau)-s\left(\left(\frac{t}{\ell}\right)^k+\tau^k\right)^{1/k}\right)dtd\tau,$$

ここで, 単純化のため

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}^{*}=\lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{+M}$$

とおいた.

(1.3), (1.4) および (2.5) を用いると

$$\int_0^\infty \Delta_k(\ell b, b)e^{-sb}db = \frac{1}{s}G_1(s)$$

となる. ここで,

$$G_1(s) \;=\; 4\sum_{nm\neq 0}^{*}\sum^{*}\int_0^\infty \exp\left(2\pi i(nt+m\tau) - s\left(\left(\frac{t}{\ell}\right)^k + \tau^k\right)^{1/k}\right)dtd\tau$$

である. 定理の証明に必要なことは, 関数 $G_1(s)$ の s に対する虚軸への極限の情報である. これに対しては, $G_1(s)$ は全平面に解析接続可能であり虚軸上に位数 3/2 の分岐点をもつ多価関数であることが示される. また, $s \to 0$ で $G_1(s) = O(s)$ もあわせて示される.

すなわち, [3, Lemma 3.16] と比較すると ℓ 倍の違いはあるが, 本質的には $\ell = 1$ の場合と同様な結果に対応していることになる.

あとは, [3, Theorem 3.19] に対して

$$\Delta_k(\ell b, b) \le K_1 b^{1/2} \qquad \text{または} \qquad \Delta_k(\ell b, b) \ge -K_2 b^{1/2}$$

(K_1, K_2 はある正定数) とおき直して同様の議論を行なえば, Theorem 2 は証明することが出来る.

References

1. G. H. Hardy, On Dirichlet's divisor problem, Proc. London Math. Soc. (2) 15 (1916), 1–25.
2. M. N. Huxley, Exponential sums and lattice points II, Proc. London. Math. Soc. 66 (3) (1993), 279- 301.
3. E. Krätzel, *Lattice Points,* Kluwer Acad. Publishers, 1988.
4. ———, Bemerkungen zu einem Gitterpunktsproblem, Math. Ann. 179 (1969), 90-96.
5. ———, Zahlen k-ter Art, Amer. J. Math. 44 (1972) 1, 309-328.
6. ———, Ω-Estimates for the number of lattice-points in n-dimensional domain, Colloquia Math. Soc. János Bolyai, 34. Topics in classical Number Theory, Budapest 1981, 979-993.
7. G. Kuba, On sums of two k-th powers of numbers in residue classes II, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 63 (1993), 87-95.
8. ———, The two parameter ellipse problem, Math. Slovaca, 44 (1994), No 5, 585-593.
9. W. G. Nowak, Sums of two k-th powers: an Omega estimate for the error term, Arch. Math. 68 (1997), 27-35.
10. L. Schnabel, Über eine Verallgemeinerung des Kreisproblems, Diss. Jena 1981; Wiss. Z. FUS Jena, Math.-Nat. R, 31 (1982), 667-681.